7 Movimientos en el plano

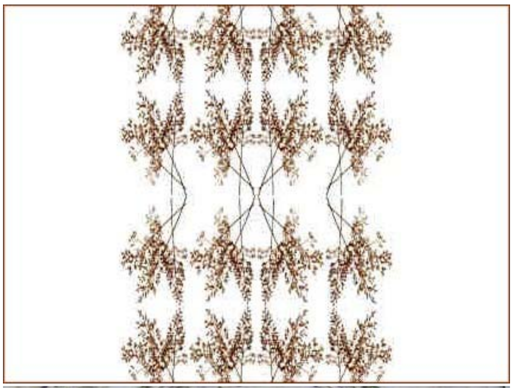
Objetivos

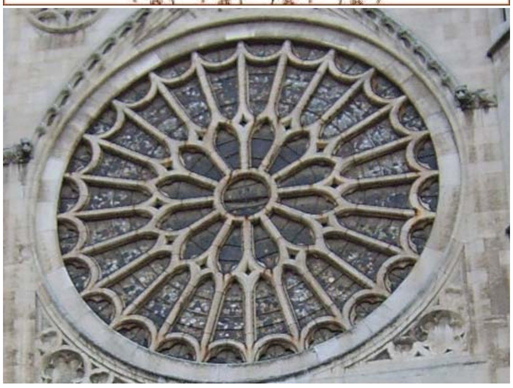
En esta quincena aprenderás a:

- Manejar el concepto de vector como elemento direccional del plano.
- Reconocer los movimientos principales en el plano: traslaciones, giros y simetrías.
- Aplicar uno o más movimientos a una figura geométrica.
- Reconocer movimientos geométricos en el arte, la naturaleza, etc..

Antes de empezar





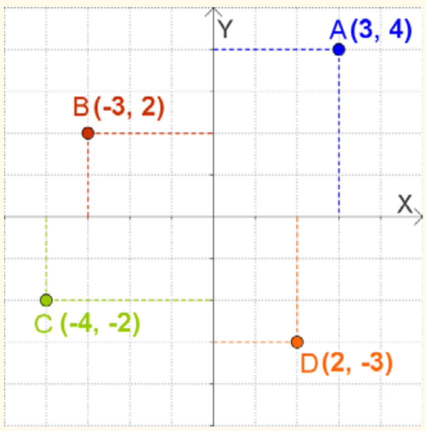



En la naturaleza, el arte, en muchos objetos cotidianos, encontrarás muestras de las formas geométricas que vas a estudiar aquí. Mira a tu alrededor y observa

Recuerda

En un sistema de ejes cartesianos cada punto se expresa mediante dos coordenadas (x,y).

La primera o abscisa indica la posición sobre el eje horizontal, positiva a la derecha del origen, negativa a la izquierda. La segunda u ordenada la posición sobre el eje vertical, positiva hacia arriba, negativa hacia abajo.



1. Vectores

Concepto de vector. Coordenadas

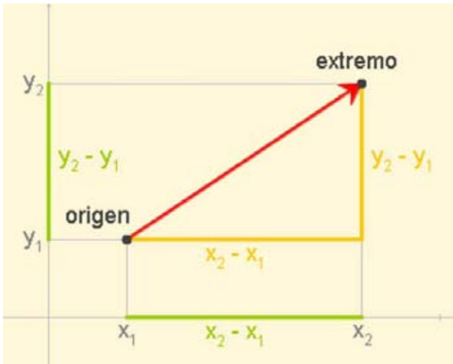
Un vector $\overrightarrow{AB}$ está determinado por dos puntos del plano, $A(x_1,y_1)$ que es su **origen** y $B(x_2,y_2)$ que es su **extremo**.

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son las de B menos las de A:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 \text{ , } y_2 - y_1).$$

Un vector tiene **módulo**, **dirección** y **sentido**:

- **Módulo**, es la distancia entre el origen y el extremo,
- **Dirección**, es la recta que pasa por origen y extremo o cualquier recta paralela a ella y
- **Sentido** es el que va desde el origen hacia el extremo y lo marca la flecha.

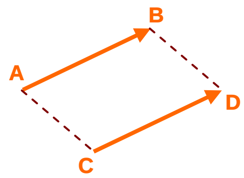


Para calcular el módulo basta utilizar el Teorema de Pitágoras:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vectores equipolentes

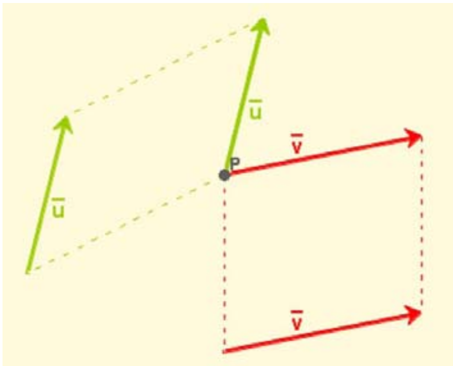
Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se llaman **equipolentes** si tienen el **mismo módulo**, la **misma dirección** y el **mismo sentido**.



Observa que parece que el vector $\overrightarrow{AB}$ se ha trasladado paralelamente a sí mismo hasta ocupar la posición del vector $\overrightarrow{CD}$.

ABCD es un paralelogramo.

- Dos vectores equipolentes son representantes del mismo vector libre.



La importancia de los vectores equipolentes reside en que se pueden trasladar a cualquier punto.

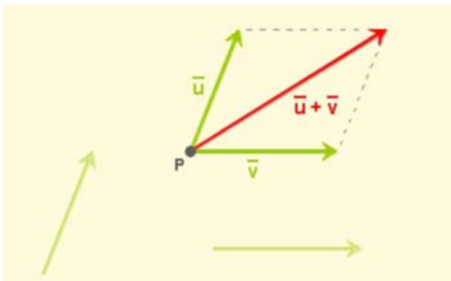
Suma de vectores

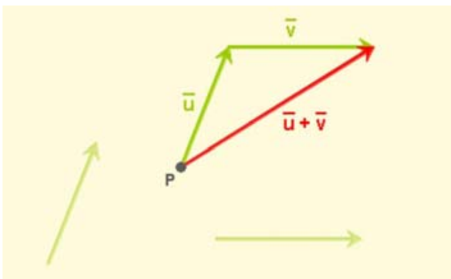
La suma de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector, $\vec{u}+\vec{v}$, que podemos construir de dos formas:

- Situando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en el mismo punto. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ queda entonces sobre la diagonal mayor del paralelogramo construido sobre los vectores sumandos.

- Haciendo coincidir el origen del vector $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}$. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ tiene como origen el origen de $\vec{u}$ y como extremo el de $\vec{v}$.

En coordenadas, la suma de $\vec{u} = (u_1,u_2)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2)$ es: $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2)$

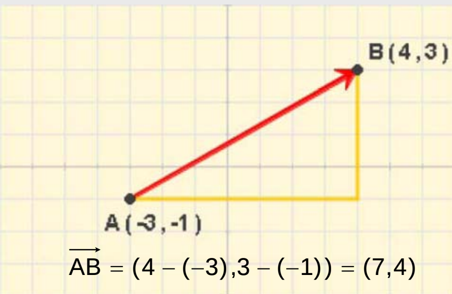




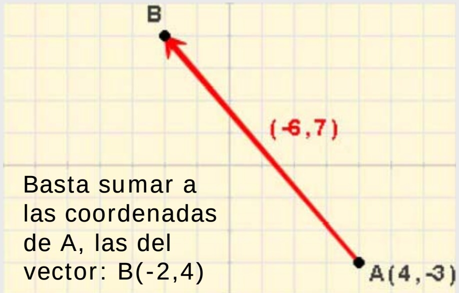
EJERCICIOS resueltos

1. Las coordenadas del vector $\vec{AB}$ son las de B menos las de A. Calcula:

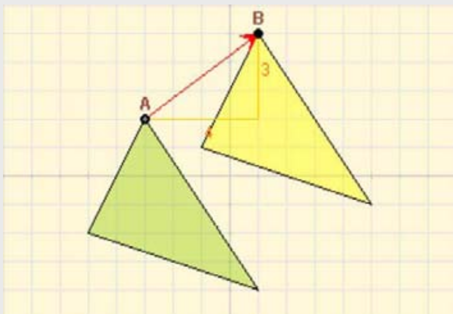
a) Las coordenadas del vector $\vec{AB}$



b) Las coordenadas del punto B.



2. Los triángulos amarillo y verde son iguales, ¿qué distancia hay entre los puntos homólogos, A(-3,2) y B(1,5)?

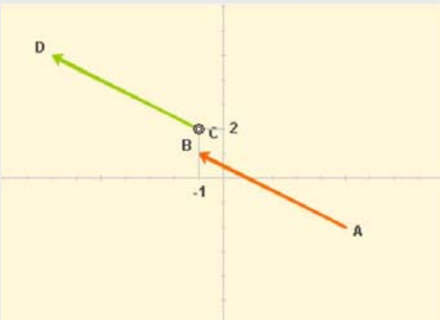


La distancia entre A y B es el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (4,3)$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

3. Los vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas, dados el punto A(5,-2) y el B(-1,1), ¿cuáles son las coordenadas del punto D?



El vector $\overrightarrow{AB} = (-1-5, 1+2) = (-6,3)$

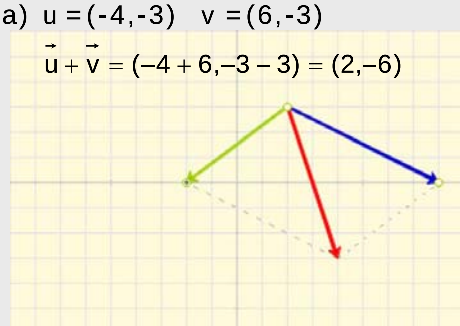
El vector $\overrightarrow{CD}$ tiene las mismas coordenadas.

Las del punto D son: (-1-6, 2+3)

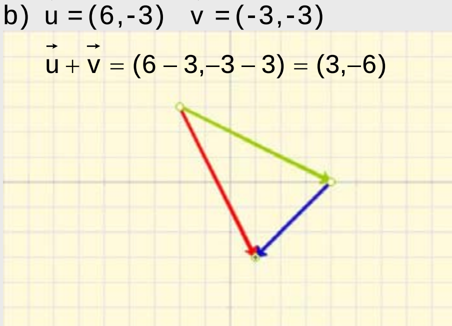
D(-7,5)

4. Suma en cada caso gráfica y analíticamente, los vectores verde $\vec{u}$, y azul $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = (-4,-3)$ $\vec{v} = (6,-3)$



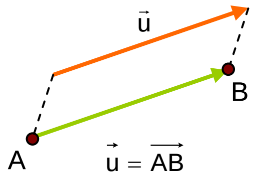
b) $\vec{u} = (6,-3)$ $\vec{v} = (-3,-3)$

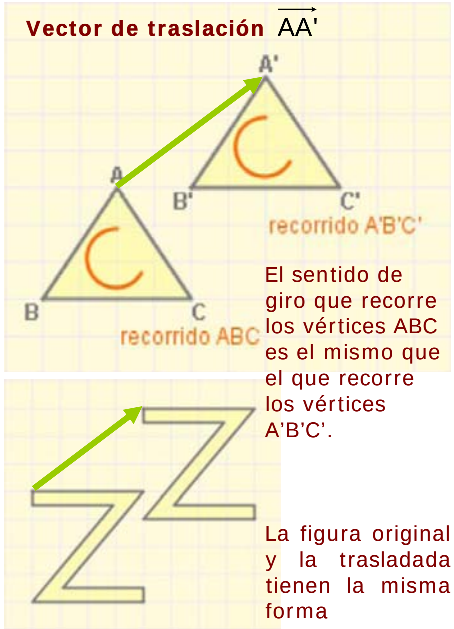


2. Traslaciones

Traslación según un vector

Una traslación de vector $\vec{u}$ es un movimiento que transforma cada punto **A** del plano, en otro punto **B** de manera que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\vec{u}$

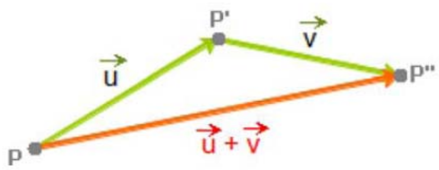


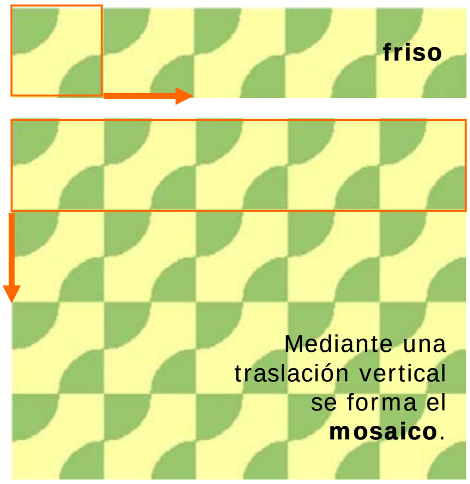


- Una traslación es un **movimiento directo**, es decir que conserva la orientación, e **isomorfo**, no cambia la forma de las figuras.

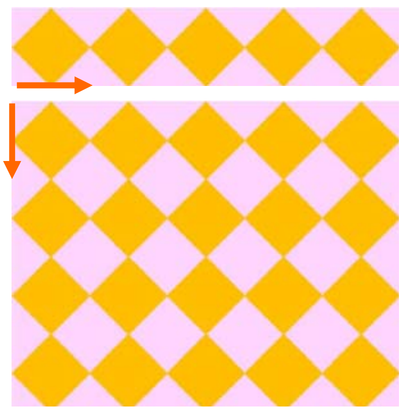
Composición de traslaciones

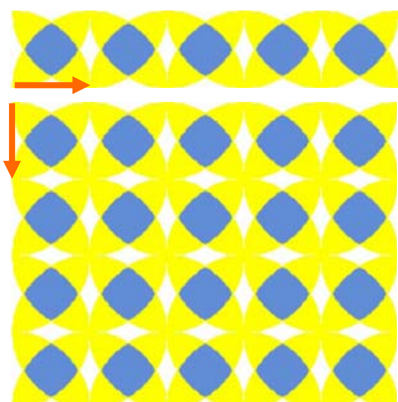
Dos traslaciones, de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se pueden componer para formar una traslación de vector $\vec{u}+\vec{v}$

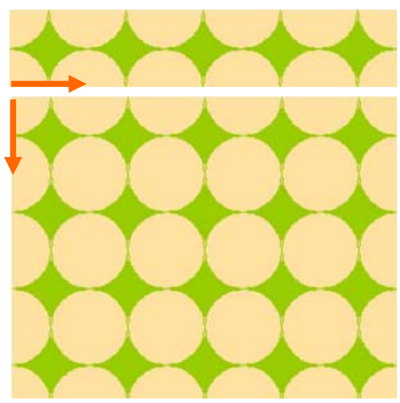




Mediante la composición de traslaciones es posible componer interesantes **frisos** o **cenefas**, que se pueden ampliar a **mosaicos**, como puedes apreciar en las imágenes.

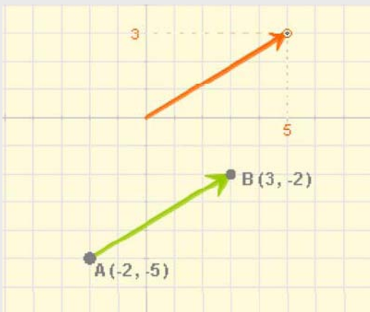


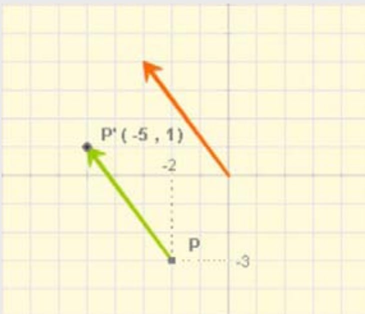


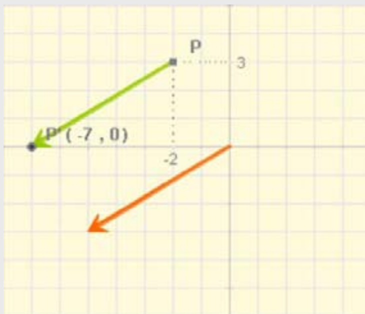


EJERCICIOS resueltos

1. Al trasladarse las coordenadas de un punto se ven incrementadas por las del vector de traslación. Compruébalo en los siguientes casos:

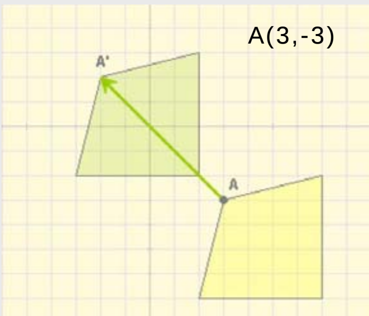


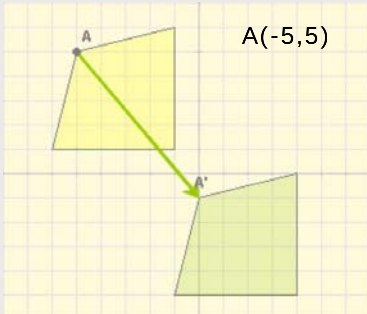


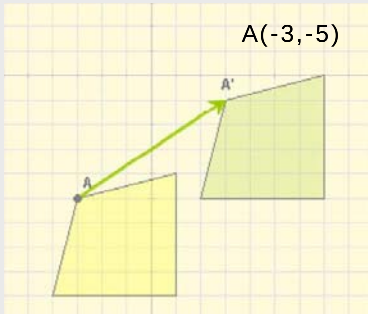


2. El cuadrilátero verde es el trasladado del amarillo en cada caso. Calcula las coordenadas del punto A.

a) $\vec{v}=(-5,5)$ A'(-2,2) b) $\vec{v}=(5,-6)$ A'(0,-1) c) $\vec{v}=(6,4)$ A'(3,-1)



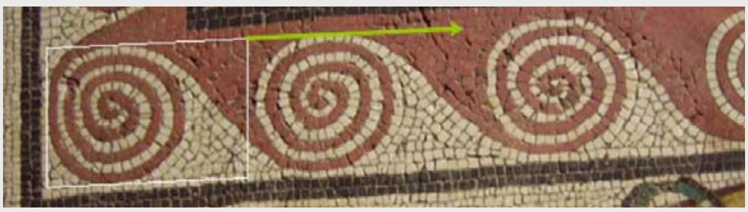




3. El arte muestra traslaciones como puedes apreciar en los ejemplos siguientes:

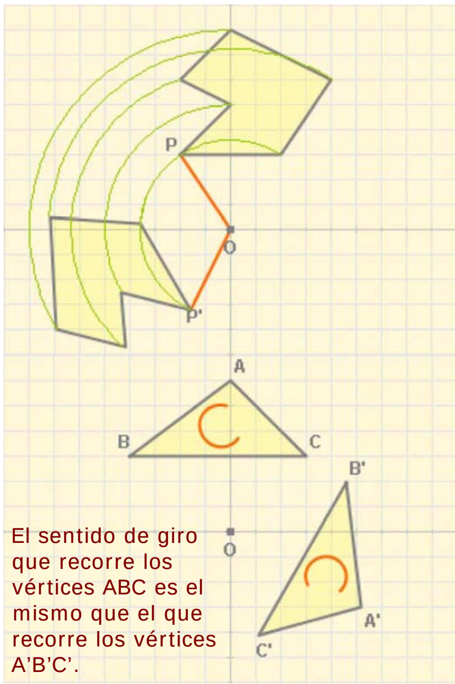
Motivo que puede apreciarse en muchas iglesias románicas, éste es de la iglesia de San Juan Bautista de Leon.

Figura presente en la ornamentación mudéjar, Catedral de la Seo de Zaragoza



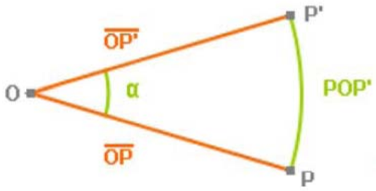
Mosaico romano

3. Giros



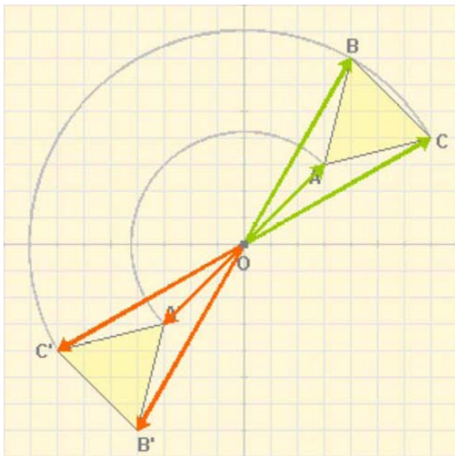
Giro de centro O y ángulo α

Un giro, de centro un punto **O** y amplitud un ángulo α, transforma cada punto **P** del plano en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a α y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

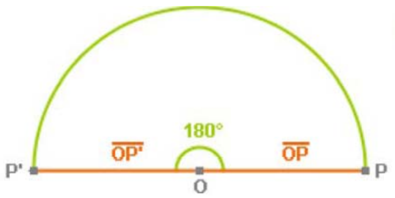


Debes tener en cuenta que un giro puede tener **orientación positiva** (contraria a las agujas del reloj) o **negativa**.

Simetría respecto a un punto

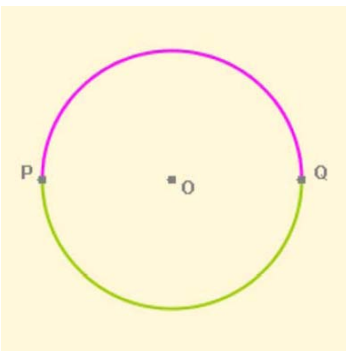


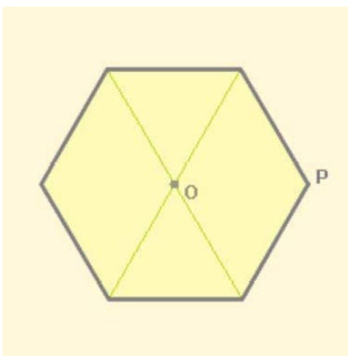
Una **simetría central**, o simetría respecto a un punto O, es un **giro** de centro O y amplitud 180º. Transforma pues, cada punto **P** en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a 180º y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

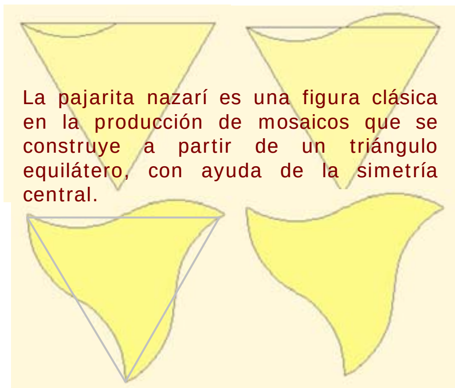


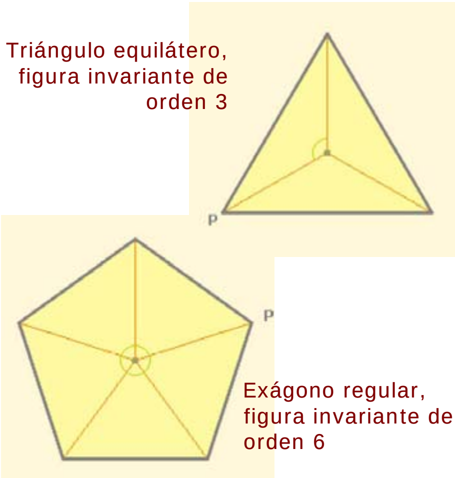
Si al aplicar a una figura una simetría de centro O la figura no varía, O se dice que es su **centro de simetría**.

Ejemplos de figuras con centro de simetría:









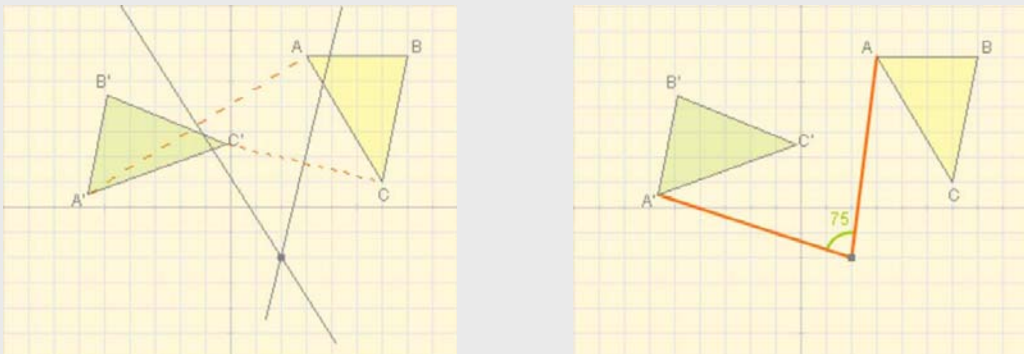
Figuras invariantes de orden n

Si al girar una figura con centro en un punto O y según un ángulo menor que 360º, coincide con si misma, el punto **O** se dice que es **centro de giro** de la figura.

Si al aplicar a una figura un giro de 360º alrededor de su centro de giro se producen **n** coincidencias, dicho centro se dice de **orden n** y la figura **invariante de orden n**.

EJERCICIOS resueltos

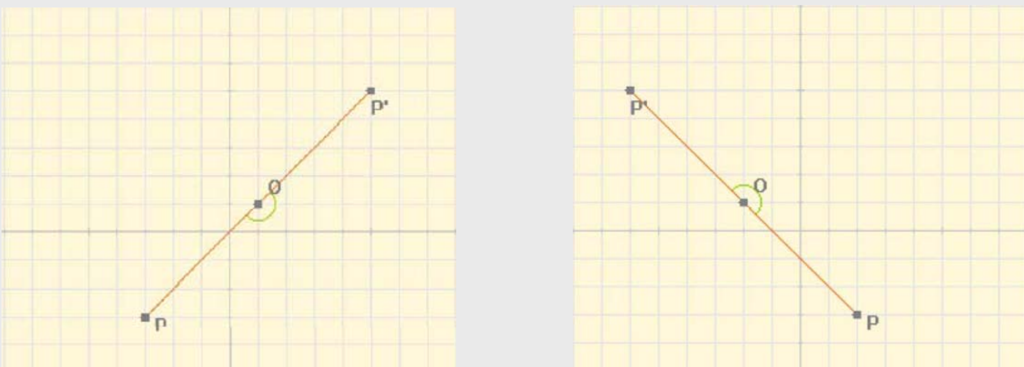
5. ¿Cuál es el centro del giro que transforma el triángulo amarillo en el verde?



Se traza el segmento que une dos puntos homólogos, por ejemplo A y A', y dibujamos la mediatriz. Hacemos lo mismo con otros dos puntos, C y C' en la figura. El punto en el que se cortan las mediatrices es el centro de giro.
Con el transportador podemos medir el ángulo, en este ejemplo 75º.

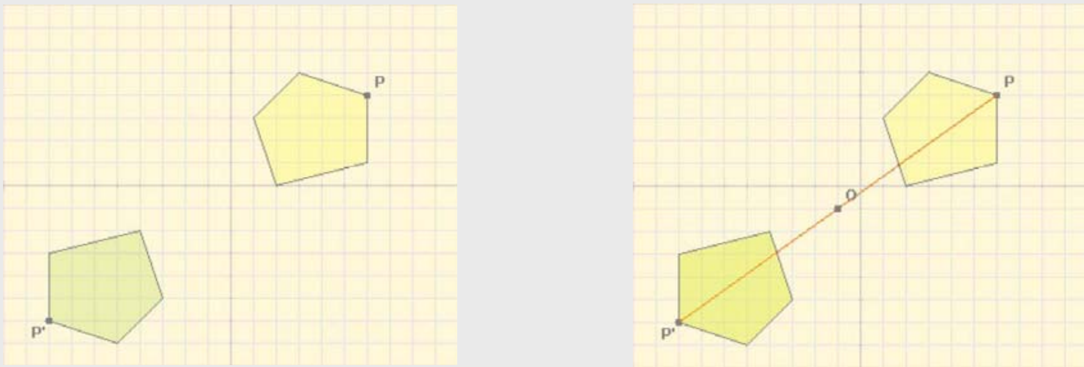
6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P', simétrico del P en la simetría de centro el punto O?

a) O(1,1) P(-3,-3) → P'(5,5) b) O(-2,1) P(2,-3) → P'(6,5)



EJERCICIOS resueltos

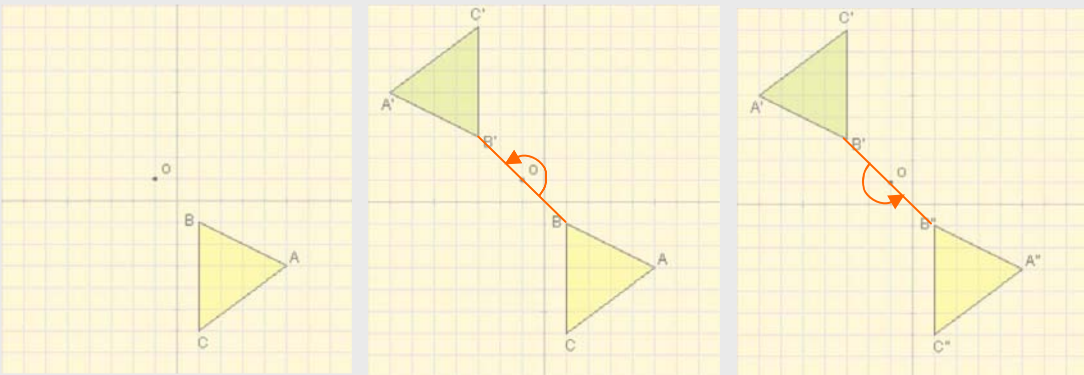
4. En la imagen se muestra un polígono (color amarillo) y su simétrico (color verde) respecto al punto O, ¿cuáles son las coordenadas de O?



El centro de simetría es el punto medio del segmento que une P(6,4) y P'(-8,-6), O(-1,-1), para calcularlas basta hacer la semisuma correspondiente (6-8)/2=-1, (4-6)/2=-1

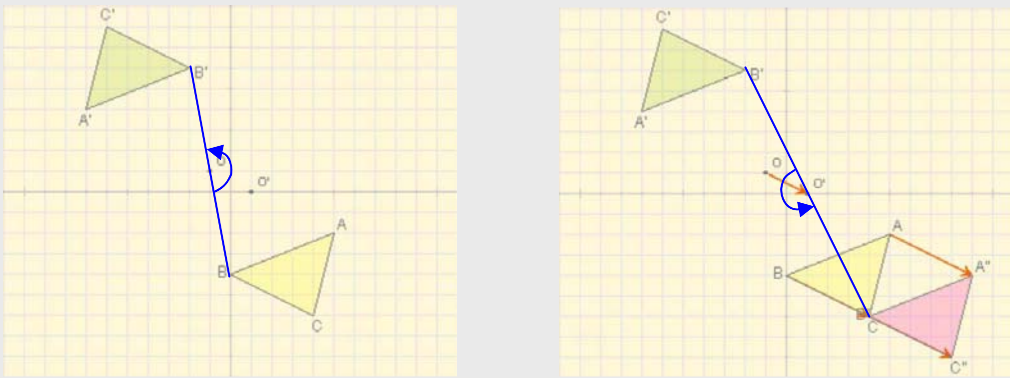
5. Al triángulo amarillo le aplicamos sucesivamente dos simetrías centrales respecto al mismo punto, O, ¿cuál es el resultado?

Al aplicarle la simetría de centro O resulta el triángulo verde, cuando a éste se le aplica de nuevo una simetría del mismo centro vuelve a la posición inicial.



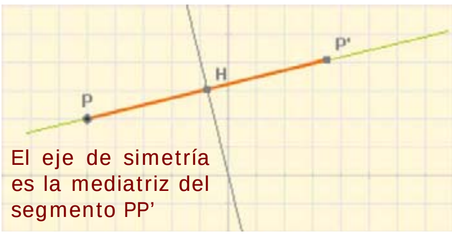
6. Se aplica al triángulo amarillo una simetría de centro O, y después otra de centro O', ¿cuál es el resultado?

Al aplicarle la simetría de centro O resulta el triángulo de color verde, a éste se aplica la simetría de centro O' resultando el de color rosa, lo mismo que si el triángulo inicial (amarillo) se traslada por el vector $2\cdot\overline{OO'}$

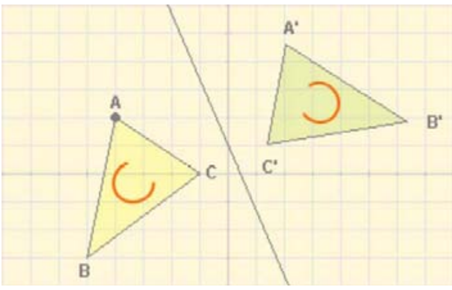


cidead

4. Simetrías



El eje de simetría es la mediatriz del segmento PP'



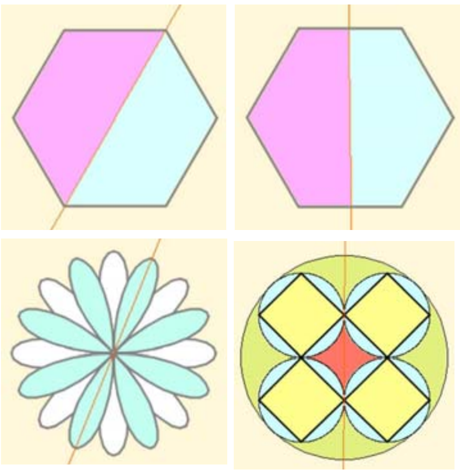
Simetría de eje e

Una simetría respecto a un eje ***e*** es un movimiento que transforma cada punto **P** del plano en otro **P'** de modo que la recta ***e*** es mediatriz del segmento de extremos **P** y **P'**.

Según esta definición, debe cumplirse que:

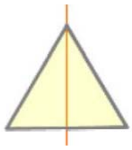
- La recta ***e*** debe ser perpendicular al segmento **PP'**
- La distancia de **P** a la recta ***e*** será igual que la distancia de **P'** a dicha recta

Una simetría axial es un **movimiento inverso**. Observa en la figura cómo se modifica el sentido de giro de los vértices del triángulo.

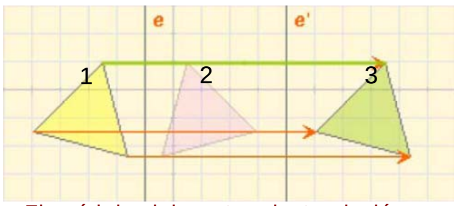

¿Cuántos ejes de simetría tienen?

Figuras con eje de simetría

Hay figuras que son **invariantes** (no se modifican) al aplicarles una simetría axial. En ese caso, el eje de la misma se llama **eje de simetría** de la figura.



Una figura puede tener varios ejes de simetría. Observa el hexágono de la izquierda y dos de sus seis ejes de simetría.



El módulo del vector de traslación es el doble de la distancia entre los ejes.

El ángulo de giro es el doble del ángulo que forman los ejes.

Composición de simetrías axiales

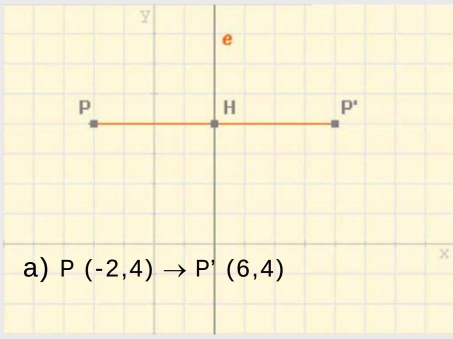
La aplicación consecutiva de dos simetrías axiales, de ejes ***e*** y ***e'***, da lugar a un nuevo movimiento que depende de la situación relativa de los ejes ***e*** y ***e'***:

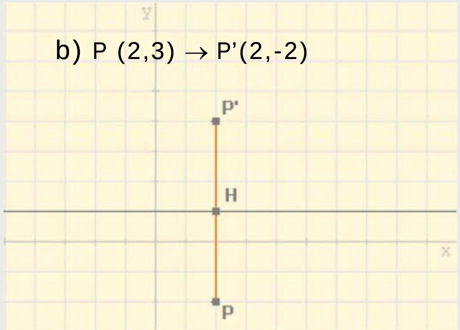
- Si los ejes ***e*** y ***e'*** son paralelos, el resultado es una traslación.
- Si los ejes ***e*** y ***e'*** se cortan en un punto, la composición da lugar a un giro alrededor de dicho punto.

Como tanto una traslación como un giro son movimientos directos, el resultado de **componer dos simetrías axiales** es un **movimiento directo**.

EJERCICIOS resueltos

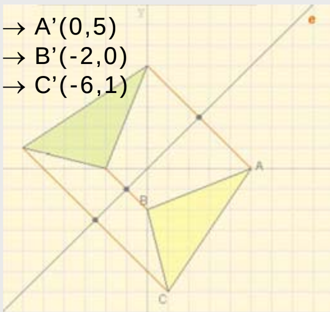
7. Calcula las coordenadas del punto P', simétrico del P respecto al eje de la figura.



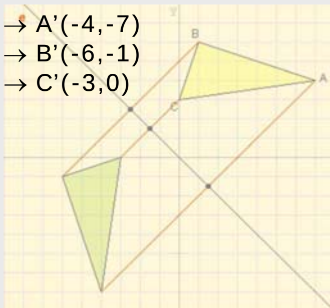


8. En cada caso dibuja el triángulo simétrico respecto del eje e, del de color amarillo e indica las coordenadas de los vértices del transformado.

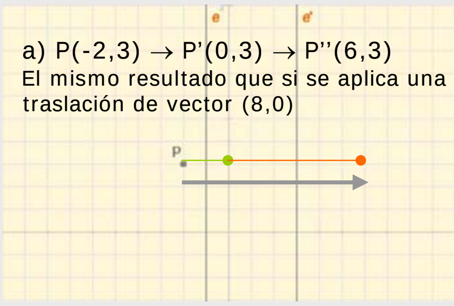
a) A(5,0) → A'(0,5)
B(0,-2) → B'(-2,0)
C(1,-6) → C'(-6,1)

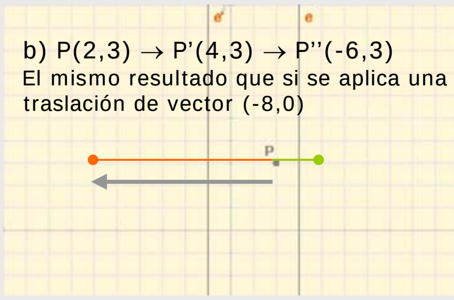


b) A(7,4) → A'(-4,-7)
B(1,6) → B'(-6,-1)
C(0,3) → C'(-3,0)

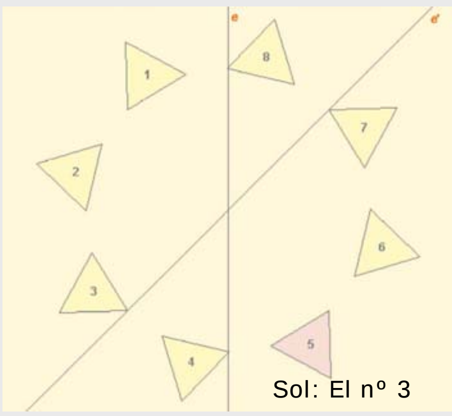


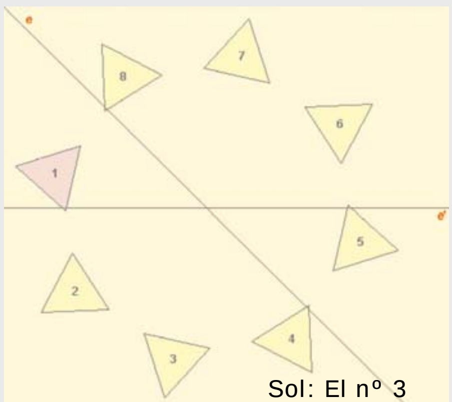
9. Calcula las coordenadas del punto que resulta al aplicarle a P primero una simetría de eje *e* y luego otra de eje *e'*.





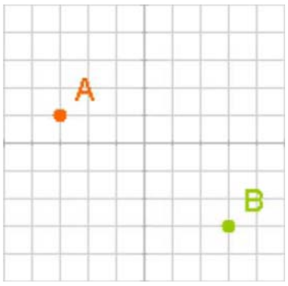
10. ¿Cuál es el transformado del triángulo de color morado respecto a la composición de simetrías de ejes *e* y *e'*?



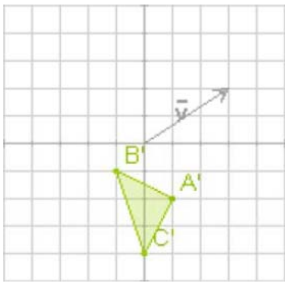


Para practicar

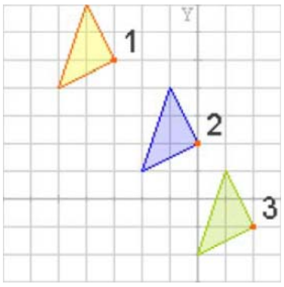
1. Determina las coordenadas y el módulo del vector de la traslación que transforma el punto A en el punto B



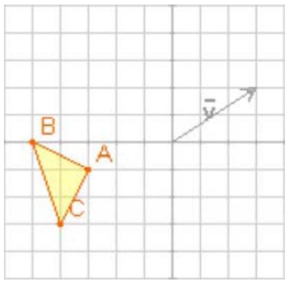
2. Halla el triángulo que ha dado lugar al de la figura, al aplicarle una traslación de vector (3,2).



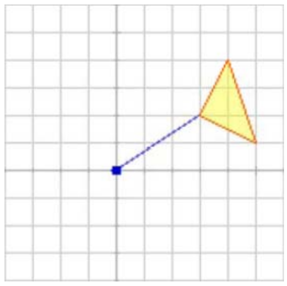
3. El triángulo de la figura se ha trasladado primero de la posición 1 a la 2, mediante una traslación de vector (3,-3), y luego a la 3 por una traslación de vector (2,-3). ¿Cuál es el vector de la traslación que pasa directamente de 1 a 3?.



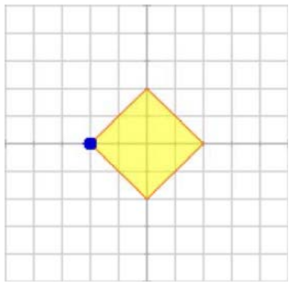
4. Calcula los vértices del triángulo que resulta al aplicar al de la figura una traslación de vector $\vec{v} = (3,2)$.



5. El triángulo ABC de la figura gira 90º en torno al origen de coordenadas, en qué triángulo se transforma?.



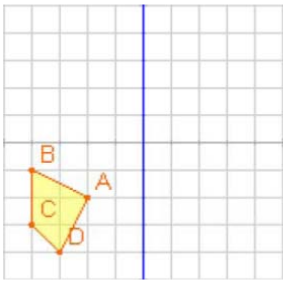
6. El cuadrado de la figura gira 45º en sentido contrario a las agujas del reloj, en torno al vértice señalado, ¿cuáles son los vértices del cuadrado transformado?.



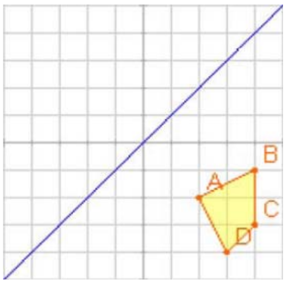
7. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría:

a) de eje el de ordenadas

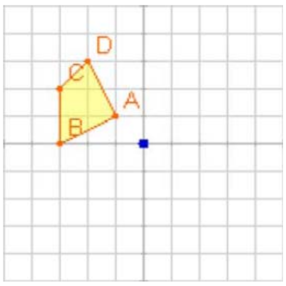
b) el de abscisas.



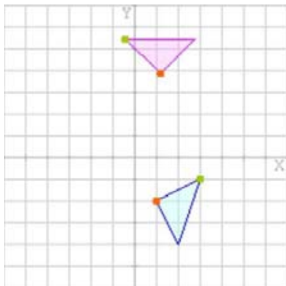
8. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría de eje el de la figura.



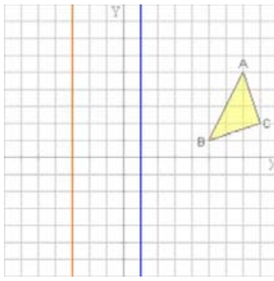
9. Halla la figura transformada del cuadrilátero ABCD por una simetría central, de centro el origen de coordenadas.



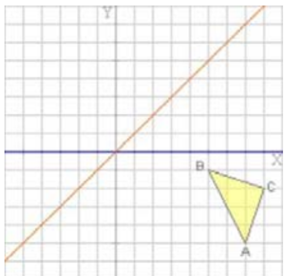
10. El triángulo azul se transforma en el morado tras un giro de centro O, dibújalo y calcula el centro de giro.



11. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.



12. Halla la figura transformada del triángulo ABC por una composición de simetrías, primero la de eje azul y luego la de eje rojo.

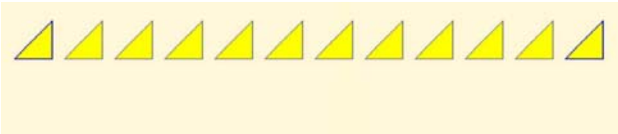


Para saber más

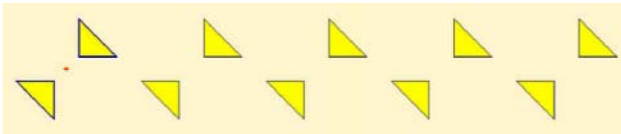
Los siete tipos distintos de frisos

Aunque pueden construirse infinitos tipos de frisos mediante traslaciones, en realidad todos ellos pueden clasificarse en sólo **siete tipos distintos** según qué movimientos existan en el motivo que se traslada infinitamente.

✓ **Tipo 1** El motivo que se traslada no presenta ningún movimiento.

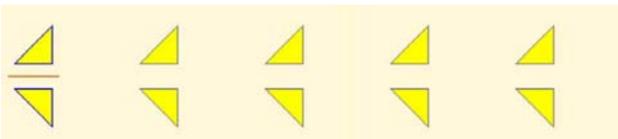



✓ **Tipo 2** El motivo que se traslada presenta una simetría central.

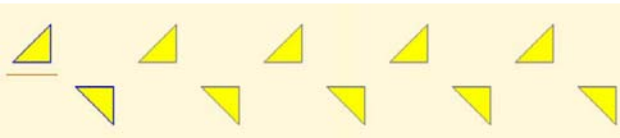



✓ **Tipo 3** El motivo que se traslada presenta una simetría axial.

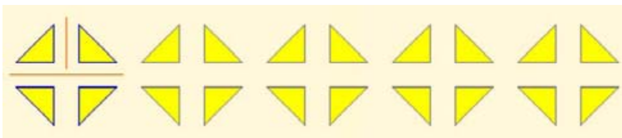

✓ **Tipo 4** El motivo que se traslada presenta una simetría axial horizontal.




✓ **Tipo 5** El motivo que se traslada presenta una simetría axial y una traslación.




✓ **Tipo 6** El motivo que se traslada presenta una simetría axial vertical y otra horizontal.

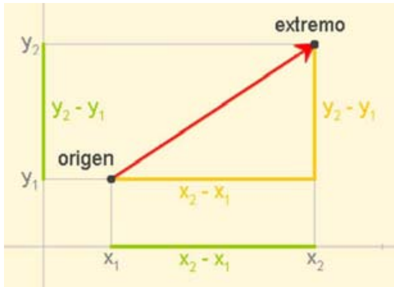



✓ **Tipo 7** El motivo que se traslada presenta una traslación seguida de una simetría horizontal quedando como resultado una simetría axial vertical.

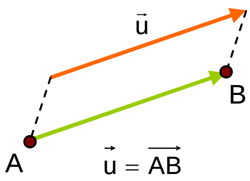

Fotografías de rejas de balcones en la C/Manifestación de Zaragoza, donde se pueden encontrar ejemplos de estos siete tipos.

Recuerda lo más importante

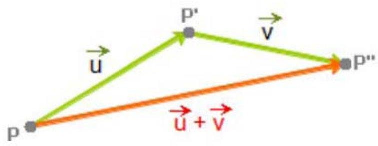
Un vector tiene **MÓDULO** que es la distancia entre el origen y el extremo, **DIRECCIÓN** que es la recta que pasa por origen y el extremo o cualquier recta paralela a ella, y **SENTIDO** que es el que va desde el origen hacia el extremo y lo marca la flecha.



Traslaciones



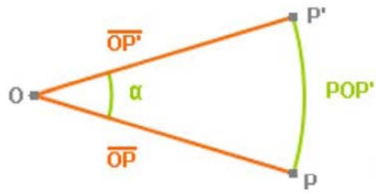
✓ Una traslación de vector $\vec{u}$ es un movimiento que transforma cada punto **A** del plano, en otro punto **B** de manera que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\vec{u}$



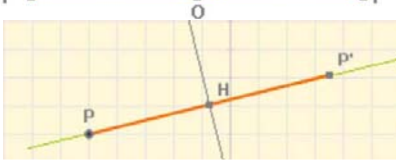
Giros

✓ Un **giro**, de centro un punto **O** y amplitud un ángulo α, transforma cada punto **P** del plano en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a α y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

✓ Si al girar una figura con centro en un punto O y según un ángulo menor que 360º, coincide con si misma, el punto **O** se dice que es **centro de giro** de la figura.



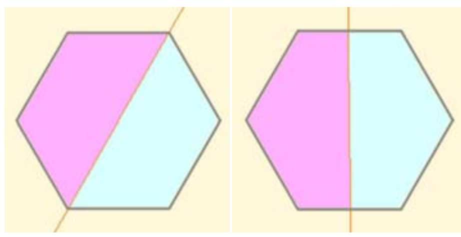
Simetrías



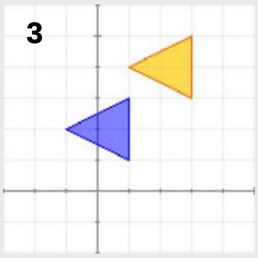
✓ Una **simetría central**, o simetría respecto a un punto O, es un **giro** de centro O y amplitud 180º. Transforma pues, cada punto **P** en otro punto **P**' de modo que el ángulo **POP'** es igual a 180º y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

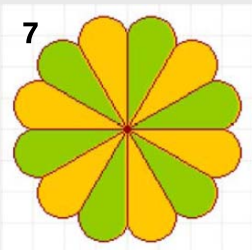
✓ Una **simetría axial** respecto a un eje ***e*** es un movimiento que transforma cada punto **P** del plano en otro **P'** de modo que la recta ***e*** es mediatriz del segmento de extremos **P** y **P'**.

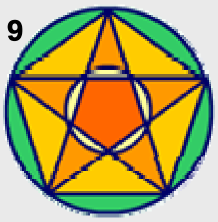
Figuras con eje de simetría

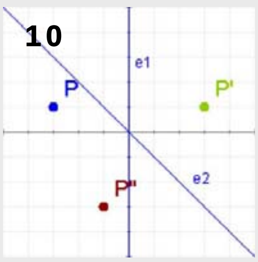


Autoevaluación









1. Dados los puntos A(-2,2) y B(3,-4), escribe las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$

2. Qué punto se obtiene al trasladar el punto P(-1,4) mediante el vector $\vec{v}=(4,-1)$

3. Halla las coordenadas del vector de la traslación que transforma el triángulo azul en el naranja.

4. El punto B(4,2) es el resultado de trasladar el punto A(-4,6) mediante una traslación de vector $\vec{v}$. ¿Qué distancia hay entre A y B?.

5. ¿Qué punto resulta al girar P(4,1) alrededor del origen de coordenadas, un ángulo de 90º en sentido contrario a las agujas del reloj?

6. ¿Cuál es el centro de la simetría que transforma el punto P(4,-2) en el P'(-2,0)?.

7. La figura de la izquierda tiene centro de simetría, ¿Cuál es el menor ángulo que ha de girar para quedar invariante?

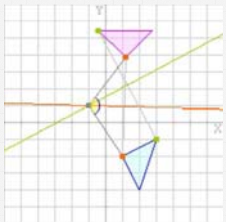
8. ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico del P(4,-2) en la simetría de eje la bisectriz del primer cuadrante?

9. ¿Cuántos ejes de simetría tiene la figura de la izquierda?

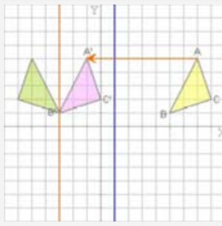
10. Al aplicar al punto P primero una simetría de eje e1 y luego una simetría de eje e2, resulta el punto P''. ¿Cuál es el ángulo del giro que transforma directamente P en P''

Soluciones de los ejercicios para practicar

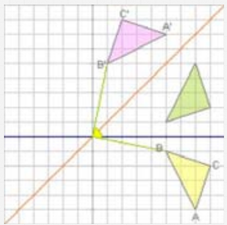
1. (6,-4), módulo= $\sqrt{52}$ = 7,4
2. A(-2,-4) B(-4,-3) C(-3,-6)
3. $\vec{v}$ =(5,-6)
4. A'(0,1) B'(-2,2) C'(-1,-1)
5. A'(-2,3) B'(-4,4) C'(-1,5)
6. Por el T. de Pitágoras el lado del cuadrado mide $\sqrt{8}$ =2,82
   Vértices: (0,82, 2,82) (-2, 2,82) (-2, 0) (0,82, 0)
7. a) A'(2,-2) B'(4,-1) C'(4,-3) D'(3,-4)
   b) A'(-2,2) B'(-4,1) C'(-4,3) D'(-3,4)
8. A'(-2,2) B'(-1,4) C'(-3,4) D'(-4,3)
9. A'(1,-1) B'(3,0) C'(3,-2) D'(2,-3)
10. Centro (-1,0)



11. A'(-1,5)
    B'(-3,1)
    C'(0,2)



12. Equivale a un giro de 90º en sentido positivo.



Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. (5,-6)
2. P'(3,3)
3. (2,2)
4. | $\vec{v}$ |=10
5. (-1,4)
6. (1,-1)
7. 60º
8. (-2,4)
9. 5
10. 90º

No olvides enviar las actividades al tutor